留数定理と Fourier 級数

Theorem. $z \in \mathbb{C}$ とする. 有理関数 $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ が, $\deg P \leq \deg Q - 2, Q(m) \neq 0\ (m \in \mathbb{Z})$ をみたし, ξ を $R(z)$ の極とするとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{int} = -\sum_{\xi} \operatorname{Res}\left(R(z) \cdot \frac{2\pi i e^{izt}}{e^{2\pi iz} - 1}; \xi\right)\ (0 \leq t < 2\pi)$$

が成り立つ.

Proof. 積分路 $\Gamma_m\ (m \in \mathbb{N})$ を

$$\Gamma_m = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Re} z| = m + \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} z| = m + \frac{1}{2} \right\}$$

とする. $s(z) = \dfrac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1}$ とすると, $z = k \in \mathbb{Z}$ は 1 位の極で留数 1 をもつ. また, Γ_m が R の極をすべて含むようにとると, 留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R(z)s(z)e^{izt}\, dz = \sum_{n=-m}^{m} R(n)e^{int} + \sum_{\xi} \operatorname{Res}\left(R(z)s(z)e^{izt}; \xi\right)$$

が成り立つ. ここで

$$|R(z)| \leq \frac{C}{m^2}, |s(z)e^{izt}| \leq 2\pi e^{\pi}\ (z \in \Gamma_m)$$

となるから, Γ_m の周長が $4(2m+1)$ であることを踏まえると左辺の積分は m^{-1} の定数倍で上から評価され, $m \to \infty$ のとき 0 に近づく. よって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{int} + \sum_{\xi} \operatorname{Res}\left(R(z)s(z)e^{izt}; \xi\right) = 0$$

となる.

以上により, 定理が示された. ■